Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. a) Discutir para qué valores de **a** el sistema siguientes es compatible $\begin{cases}(a+2)x+(a-1)y-z=1\\ ax-y+z=-1\\ 11x+ay-z=a\end{cases}$

(7 puntos)

b) Resuélvalo en el caso en que a = 0. (3 puntos)

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 11 & a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ 2a+2 & a-2 & 0 \\ 9-a & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1).\begin{vmatrix} 2a+2 & a-2 \\ 9-a & 1 \end{vmatrix} = 2a+2-(a-2)(9-a) =$$
$$= 2a+2-(9a-a^2-18+2a) = 2a+2-11a+a^2+18 = a^2-9a+20 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a^2-9a+20 = 0 \rightarrow \Delta = (-9)^2A-4.1.20 = 1$$

$$a = \frac{9\pm\sqrt{1}}{2.1} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{9+\sqrt{1}}{2.1} = 5 \\ a = \dfrac{9-1}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\forall a \in R - \{4\,,5\} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ a = 4$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 11 & 4 & -1 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow rang(A) = 2 \neq rang(A\ /\ B) = 3 \rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a = 5$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \\ 11 & 5 & -1 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & -1 & 1 \\ 12 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow rang(A) = 2 \neq rang(A\ /\ B) = 3 \rightarrow Sistema\ Incompatible$$

b)

Cuando **a = 0**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 11 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow -2y = 2 \rightarrow y = -1 \rightarrow 9x-1 = -1 \rightarrow 9x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow 0+1-z = 1$$
$$z = 0 \rightarrow Solución \rightarrow (x\ ,\ \ y\ ,\ \ z) = (0\ ,\ \ -1\ ,\ \ 0) \rightarrow \alpha \in R$$

2. Las funciones f (x) = $x^4 + ax^2 + bx$ y g (x) = $x – cx^2$ pasan por el punto (1 , 0). Determinar los coeficientes a, b y c para que tengan la misma recta tangente en este punto y Calcularla (10 puntos)

$$\begin{cases} f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \\ g'(x) = 1 - 2cx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \rightarrow 1^4 + a.1^2 + b.1 = 0 \rightarrow a + b = -1 \\ g(1) = 0 \rightarrow 1 - c.1^2 = 0 \rightarrow 1 - c = 0 \rightarrow c = 1 \\ m = f'(1) = 4.1^3 + 2a.1 + b \rightarrow 2a + b + 4 \\ m = g'(1) = 1 - 2.1.1 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b + 4 = -1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -a - b = 1 \\ 2a + b = -5 \end{cases} \rightarrow a = -4 \rightarrow -4 + b = -1 \rightarrow b = 3 \rightarrow Solución \rightarrow (a\ ,\quad b\ ,\quad c) = (-4\ ,\quad 3\ ,\quad 1)$$

3. Determinar la posición o relativa del plano **x + y + z = 1** con la recta de ecuaciones $r: x - 1 = y - 1 = \frac{z-1}{-2}$ (4 puntos) Calcular la proyección ortogonal de la recta sobre el plano. (6 puntos)

El plano puede ser paralelo, contener o cortarse con la recta; en los dos primeros casos los vectores directores de ambos son perpendiculares y si además un punto cualquiera de la recta pertenece al plano la recta pertenece a él, sino es así recta y plano son paralelos. Si el producto escalar es distinto de cero recta y plano se cortan en un punto. Sea el plano π y la recta **r**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\ ,\quad 1\ ,\quad 1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1\ ,\quad 1\ ,\quad -2) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_\pi}.\overrightarrow{v_r} = (1\ ,\quad 1\ ,\quad 1).(1\ ,\quad 1\ ,\quad -2) = 1 + 1 - 2 = 0$$

La recta esta contenida o es paralela al plano. Tomemos un punto R cualquiera de la recta (tomamos el indicado en su ecuación) y comprobamos si pertenece al plano, de pertenecer la recta está contenida en el plano, si no pertenece la recta es paralela

$$R(1\ ,\quad 1\ ,\quad 1) \rightarrow 1 + 1 + 1 = 1 \rightarrow 3 \neq 1 \rightarrow No\ pertenece \rightarrow Son\ paralelos\ recta\ y\ plano$$

Desde dos puntos **R₁** y **R₂** (uno será el señalado en la ecuación) de la recta trazaremos dos perpendiculares **u** y **v** al plano, que contengan esos puntos. Dichas rectas tendrán como vector director el del plano y los puntos de intersección P y Q de la rectas con el plano son los puntos que determinaran la recta **s** proyección buscada

$$\begin{cases} r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases} \\ \overrightarrow{v_u} = \overrightarrow{v_v} = \overrightarrow{v_\pi} \rightarrow (1\ ,\quad 1\ ,\quad 1) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} R_1(1\ ,\quad 1\ ,\quad 1) \rightarrow u: \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 1 + \beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} \rightarrow 1 + \beta + 1 + \beta + 1 + \beta = 1 \\ \alpha = 1 \rightarrow R_2(2\ ,\quad 2\ ,\quad -1) \rightarrow v: \begin{cases} x = 2 + \delta \\ y = 2 + \delta \\ z = -1 + \delta \end{cases} \rightarrow 2 + \delta + 2 + \delta - 1 + \delta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\beta = -2 \rightarrow \beta = -\dfrac{2}{3} \rightarrow P\begin{cases} x = 1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right) \\ y = 1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right) \\ z = 1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right) \end{cases} \rightarrow P\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \\ 3\delta = -2 \rightarrow \delta = -\dfrac{2}{3} \rightarrow P\begin{cases} x = 2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right) \\ y = 2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right) \\ z = -1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right) \end{cases} \rightarrow Q\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{5}{3}\right) \end{cases}$$

El vector PQ y uno de los puntos (tomaremos P) determinan la recta s buscada

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}, \frac{3}{3}, -\frac{6}{3}\right) = (1, 1, -2) \rightarrow s: \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} + \sigma \\ y = \dfrac{1}{3} + \sigma \\ z = \dfrac{1}{3} - 2\sigma \end{cases}$$

4. Las alturas X de los estudiantes de 18 años de los institutos de Palma se modelan según una ley normal de media = 1,78 m y desviación típica = 0,65 m. Se pide:
a) Porcentaje de estudiantes de 18 años de los institutos de Palma que tienen más de 1,90 m. (4 puntos)
b) Tomamos una muestra de 100 estudiantes de 18 años de los institutos de Palma y queremos seleccionar los 30 más altos. Cuál es la altura mínima y que debe tener un estudiante de 18 años de los institutos de Palma para ser seleccionado? (6 puntos)

La variable X sigue una normal N(μ, σ) = N(1'78, 0'65). Calculemos las probabilidades pedidas:
a)
Porcentaje de estudiantes de 18 años de los institutos de Palma que tienen más de 1,90 m.

Me piden **p(X ≤ 1'9) =** $p\left(Z \geq \dfrac{1'9 - 1'78}{0'65}\right)$ = p(Z ≥ 0'18) = 1 - p(Z ≤ 0'18) = 1 – 0'5714 **= 0'4286 = 42'86%.**

b)
Tomamos una muestra de 100 estudiantes de 18 años de los institutos de Palma y queremos seleccionar los 30 más altos. Cuál es la altura mínima y que debe tener un estudiante de 18 años de los institutos de Palma para ser seleccionado?

Suponemos que de 100 elegir 30 más altos es tener una probabilidad 30/100 = 0'3

Me piden "k" con p(X ≥ k) = **0'3** = 1 - p(X ≤ k) = 1 - $p\left(Z \leq \dfrac{k - 1'78}{0'65}\right) \rightarrow p\left(Z \leq \dfrac{k - 1'78}{0'65}\right)$ = 1 – 0'3 = **0'7**,

En la N(0,1) buscamos la probabilidad 0'7 y no viene, pero está entre 0'6985 y 0'7017, que corresponden a "z" 0'52 y 0'53, por tanto tomamos la media para z, es decir z = (0'52 + 0'53)/2 = 0'525, luego tenemos

$\dfrac{k - 1'78}{0'65} = 0'525 \rightarrow$ **k =** 0'65·0'525 + 1'78 **= 2'12. Luego la altura mínima para elegir es 2'12 m.**

OPCIÓN B

1. Consideramos la matriz y los vectores siguientes: $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}$

Calcular **x** e **y** para que se satisfaga que: b – **A.c =A. d**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6-y \\ -2+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

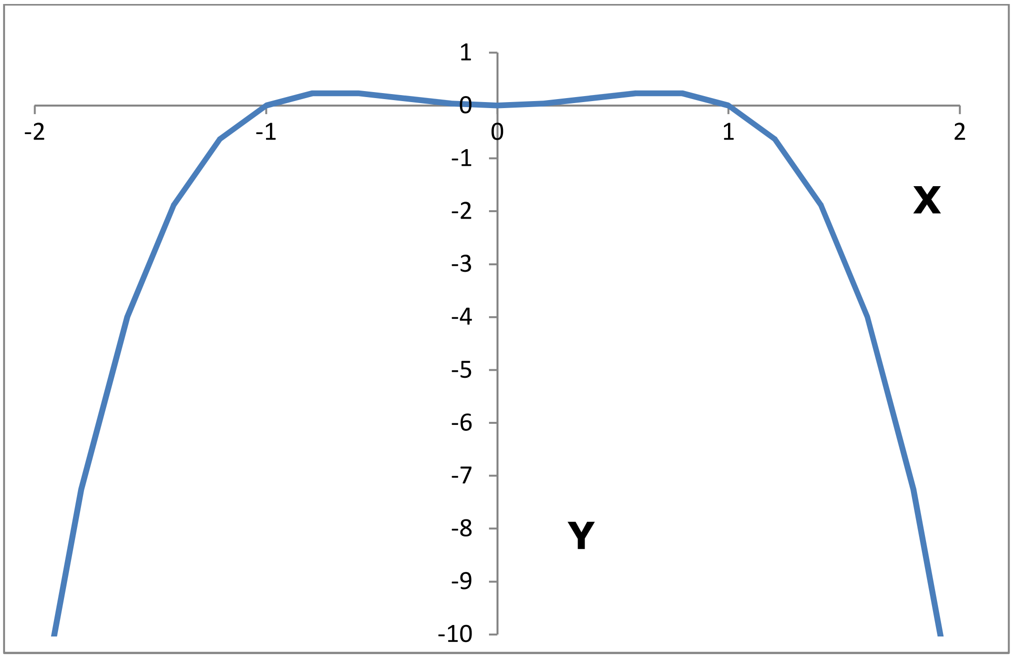
$$\begin{pmatrix} 6x - xy - 2x + 2y^2 \\ -2y + 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to 2y^2 - 2y = \frac{3}{2} \to 4y^2 - 4y = 3 \to 4y^2 - 4y - 3 = 0 \to$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.4.(-3) = 64 \to y = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2.4} \to \begin{cases} y = \frac{4+8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{4-8}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Si\ y = \frac{3}{2} \to 4x - \frac{3}{2}x + 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 \to 4x - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} - 2 = 0 \to 8x - 3x + 9 - 4 = 0 \to 5x + 5 = 0 \to x = -1$$

$$Si\ y = -\frac{1}{2} \to 4x + \frac{1}{2}x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \to 4x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 2 = 0 \to 8x + x + 1 - 4 = 0 \to 9x - 3 = 0 \to x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2. Consideramos la región delimitada por la función $f(x) = x^2 - x^4$ y el eje de abscisas eje **OX**. Haga un borrador de la región pedida (6 puntos) y Calcular el área de la región o. (4 puntos)



Es una función simétrica

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \rightarrow y = 0 \rightarrow\ x^2(x^2-1) = 0 \rightarrow x^2(x-1)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Continuación del Problema 2 de la opción B

$$A = 2\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx - 2\int_0^1 x^4\,dx = 2.\frac{1}{3}[x^3]_0^1 - 2.\frac{1}{5}[x^5]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}.(1^3 - 0^3) - \frac{2}{5}.(1^5 - 0^5)$$

$$A = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15}\,u^2$$

3. Consideramos la recta $\frac{x-1}{2} = y + 1 = -z + 1$ y el plano **x – y = 0** Calcular el área del triángulo formado por el punto de corte entre la recta y el plano, el punto (1 , - 1 ,1) de la recta y la proyección ortogonal de este punto sobre el plano. (10 puntos)

Punto de intersección I del plano con la recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \rightarrow 1 + 2\alpha - (-1 + \alpha) = 0 \rightarrow 1 + 2\alpha + 1 - \alpha = 0 \rightarrow 2 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = -2$$

$$\rightarrow I \begin{cases} x = 1 + 2.(-2) \\ y = -1 + (-2) \\ z = 1 - (-2) \end{cases} \rightarrow I(-3\,,\quad -3\,,\quad 3)$$

Para hallar el punto Q que es proyección ortogonal sobre el plano hallaremos una recta s que pasando por el punto dado P sea perpendicular al plano, tendrá como vector director el del plano

$$\vec{v_\pi} = \vec{v_s} = (1\,,\quad -1\,,\quad 0) \rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -1 - \beta \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow 1 + \beta - (-1 - \beta) = 0 \rightarrow 2 + \beta = 0 \rightarrow \beta = -2$$

$$\rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + (-2) \\ y = -1 - (-2) \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow Q(-1\,,\quad 1\,,\quad 1)$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores PQ y PI

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1\,,\quad 1\,,\quad 1) - (1\,,\quad -1\,,\quad 1) = (-2\,,\quad 2\,,\quad 0) \\ \overrightarrow{PI} = (-3\,,\quad -3\,,\quad 3) - (1\,,\quad -1\,,\quad 1) = (-4\,,\quad -2\,,\quad 2) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PI} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{k} + 8\vec{k} + 4\vec{j}$$

$$= 4\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PI}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 16 + 144} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11} \rightarrow Área = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PI}\right| = \frac{1}{2}.4\sqrt{11} = 2\sqrt{11}\,u^2$$

4. En una comunidad de 500 estudiantes de segundo de bachillerato, 200 estudian la opción científica tecnológica. Hay 150 que practican fútbol y 100 que practican basquet (entendemos que no hay ninguno que practique fútbol y basquet a la vez). De los que practican basquet, 70 estudian la opción científica tecnológica, y hay 150 estudiantes que no practican deporte ni hacen la opción científica tecnológica. Se pide:
a) Probabilidad de que un estudiante estudio la opción científica tecnológica y no practique deporte.(3 puntos)
b) Sabiendo que un estudiante practica fútbol,¿ cuál es la probabilidad de que estudio la opción científica tecnológica? (3 puntos)
c) Son independientes los eventos "practicar fútbol " y "estudiar la opción o científica tecnológica ". Razona la respuesta. (4 puntos)

Hacemos una tabla de contingencia, la completamos (en negrita) y después aplicamos la de Laplace:
$\left(\dfrac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos favorables}}\right)$
Sea Bachi_CT y Bachi_no CT a "Bachillerato opción Científica Tecnológica" y "Bachillerato opción no Científica Tecnológica"

	Futbol	Básquet	No deporte	**TOTAL**
Bachi_CT	**30**	70	**100**	200
Bachi_no CT	**120**	**30**	150	**300**
TOTAL	150	100	**250**	500

a)
Probabilidad de que un estudiante estudio la opción científica tecnológica y no practique deporte.

Me piden **p(no deporte condicionado a Bachi_CT) =** $\left(\dfrac{\text{total no de porte y Bachi\_CT}}{\text{total alumnos Bachi\_CT}}\right)$ = (100/200) **= 0'5.**

b)
Sabiendo que un estudiante practica fútbol,¿ cuál es la probabilidad de que estudio la opción científica tecnológica?

Me piden **p(Bachi_CT condicionado a futbol) =** $\left(\dfrac{\text{total futbol y Bachi\_CT}}{\text{total alumnos de futbol}}\right)$ = (30/150) **= 0'2.**

c)
Son independientes los eventos "practicar fútbol " y "estudiar la opción o científica tecnológica ". Razona la respuesta.

Sabemos que dos sucesos A y B son independientes si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

p(futbol y Bachi_CT) = $\left(\dfrac{\text{total futbol y Bachi\_CT}}{\text{total alumnos}}\right)$ = (30/500) **= 0'06**

p(futbol) = $\left(\dfrac{\text{total futbol}}{\text{total alumnos}}\right)$ = (150/500) **= 0'3**

p(Bachi_CT) = $\left(\dfrac{\text{total Bachi\_CT}}{\text{total alumnos}}\right)$ = (200/500) **= 0'4**

Como **$0'3 \cdot 0'4 = 0'12 \neq 0'06$**, **los sucesos "practicar fútbol " y "estudiar la opción o científica tecnológica" no son independientes.**